LA ECUACIÓN DEL CALOR DE FOURIER: RESOLUCIÓN MEDIANTE MÉTODOS DE ANÁLISIS EN VARIABLE REAL Y EN VARIABLE COMPLEJA

María del Carmen Ibarra[a] *
[a]*Facultad de Ingeniería, UNaM; J. M. Rosas 325, CP 3360, Oberá, Misiones.*
**03755-422170, ibarra@fio.unam.edu.ar*

Resumen

Esta presentación forma parte del proyecto de investigación: "Matemática Aplicada para Carreras de Ingeniería – Diseño e Implementación de Propuestas Didácticas Contextualizadas" actualmente en desarrollo en la Facultad de Ingeniería de la UNaM, cuyo objetivo principal consiste en la elaboración de material didáctico para el abordaje de una Matemática en Contexto para Ingeniería, donde se asocia la disciplina con áreas específicas de la carrera a través de problemas interdisciplinarios, de manera que el estudiante logre apreciar la inserción transversal de la Matemática en su carrera, así como su potencial para el planteo y resolución de modelos analíticos que representen situaciones y/o problemas reales. En esta ocasión se presenta **La Ecuación del Calor de Fourier**, que analiza la transferencia de calor en el interior de cuerpos sólidos y cuyo modelo matemático consiste en una Ecuación Diferencial Parcial de segundo orden, que puede ser resuelta por métodos del Análisis Real y también del Análisis Complejo; desde ambas perspectivas se presenta el tema. La Ecuación del Calor es especialmente rica en aplicaciones de la física – matemática y además su contexto histórico es sumamente interesante, pues permite al estudiante apreciar la forma en que se fueron construyendo los cimientos de la Teoría Analítica del Calor y cómo destacados matemáticos y físicos de la época (Siglos XVIII y XIX) fueron haciendo sus aportes.

Palabras clave: Matemática en Contexto, Ingeniería, Ecuaciones Diferenciales Parciales, Ecuación del Calor, Series de Fourier.

Introducción

Esta presentación forma parte de la producción del Proyecto de Investigación "Matemática Aplicada para Carreras de Ingeniería – Diseño e Implementación de Propuestas Didácticas Contextualizadas", actualmente en desarrollo en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Misiones (FI-UNaM). El proyecto tiene como principal objetivo el análisis del rol de la Matemática en el mapa curricular de la carrera (en las especialidades Electromecánica, Electrónica, Civil, Industrial y afines), su vinculación con las demás áreas y su inserción en contextos específicos de la Ingeniería; desde aquí se propone el diseño y elaboración de material didáctico que contemple modelos matemáticos de situaciones y/o problemas de distintas disciplinas– como Física, Mecánica, Termodinámica, Electrónica –, así mediante el planteo y resolución de dichos modelos, el estudiante podrá apreciar la inserción de la matemática en su carrera y la vinculación con las áreas específicas de su futura profesión; también se considera de suma importancia el análisis e interpretación de las soluciones encontradas. De esta manera a través de problemas interdisciplinarios se pretende que el estudiante logre apreciar el carácter transversal de la Matemática en el contexto de la Ingeniería.
La Matemática es uno de los ejes principales de la formación del Ciclo Básico en carreras de Ingeniería y los estudiantes están ávidos de "aplicar" los conocimientos matemáticos adquiridos en los primeros tramos de la carrera a situaciones y/o problemas reales, es así que la disciplina despliega su verdadero potencial cuando se la presenta vinculada a áreas específicas de la Ingeniería. En cambio si las asignaturas del área matemática se dictan aisladas de las demás materias, se corre el riesgo de decepcionar al alumno, quien la considerará un obstáculo que debe sobrepasar, para llegar al Ciclo Superior, donde recién podrá abordar temas de su interés; para que esta situación no tenga lugar es necesario presentar una Matemática en Contexto, donde además del indiscutido carácter formativo y analítico intrínseco de esta ciencia, se deje en evidencia su potencial para el planteo y resolución de problemas y/o situaciones propias de la Ingeniería. Desde este punto de vista la presente investigación se plantea desde la Cátedra de Matemática Aplicada de la FI-UNaM, ubicada en el cuarto semestre de la carrera, allí se reciben alumnos que ya han cursado las asignaturas básicas de Matemática, como

Cálculo y Algebra, pero además en su trayecto curricular han cursado (o están haciéndolo) asignaturas de otras áreas como Física, Mecánica, Termodinámica y Electrónica básica, lo que permite la presentación y discusión de ejemplos y/o problemas inherentes a estas disciplinas, tratados desde un punto de vista analítico mediante la Matemática. Así se han seleccionado algunos ejemplos y/o problemas interdisciplinarios, uno de ellos es la **Ecuación del Calor de Fourier**, en la cual se plantea un modelo físico – matemático para la conducción del calor en cuerpos sólidos y al cual se refiere esta presentación.

Contexto histórico

La Ecuación del Calor es apropiada para el abordaje de una Matemática Aplicada al contexto de carreras de Ingeniería pues involucra conceptos inherentes a disciplinas como Física y Termodinámica; de manera que es terreno fértil para presentar la Matemática vinculada a áreas propias de la Ingeniería; además los conceptos matemáticos asociados al planteo y resolución de esta ecuación, son de una riqueza y un nivel de complejidad interesantes, ya que entran en escena Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP), Series de Fourier, Análisis Real y Análisis Complejo; sobre el tratamiento analítico de cada una de estas cuestiones volveremos más adelante, ahora vamos a hacer un breve recorrido por la Historia de las Matemáticas, para ver cómo se fue gestando la Ecuación del Calor y los aportes que hicieron los matemáticos y físicos más destacados de la época (Siglos XVIII y XIX).
No estaría completa la génesis de la Ecuación del Calor si no hiciéramos referencia a su gran predecesora: **La Ecuación de la Cuerda Vibrante** (ó Ecuación de Onda), que plantea la forma que adoptará la función y(x,t) que representa el desplazamiento vertical en función del tiempo de cada punto (ubicado en la abscisa x) de una cuerda de longitud L fija en ambos extremos, siendo dicha cuerda apartada en el instante inicial de su posición de equilibrio y adquiriendo así la forma de una función continua y(x,0) = f(x). Encontrar el modelo matemático que resuelva el Problema de la Cuerda Vibrante data de principios del Siglo XVIII y de él se han ocupado matemáticos y físicos célebres. Uno de los primeros en trabajar en el tema ha sido el afamado matemático suizo Johann Bernoulli (1667-1748) quien en 1727 propuso una solución, que si bien no era del todo incorrecta, carecía de la generalidad necesaria; en 1746 el matemático francés Jean le Rond D'Alembert (1717-1783) encontró el modelo matemático que representaba este fenómeno, consistente en la EDP: $\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$ donde a es una constante que depende de las características físicas de la cuerda. D'Alembert además propuso una solución para esta ecuación, de la forma: $y(x,t) = 1/2\,[f(x-at) + f(x+at)]$; esta solución consiste en la superposición de dos ondas viajeras a través de la cuerda, en direcciones opuestas. En 1749, el destacado matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) también presentó sus aportes y coincidió en gran parte con la solución de D'Alembert, pero añadiendo un carácter más general a la solución y admitiendo que la función f(x) podría presentar puntos no diferenciables ó incluso discontinuidades finitas, es decir continua a tramos. La solución de D'Alembert tiene un carácter netamente matemático, pero no aporta demasiado acerca de la cuestión física del fenómeno; es así que los físicos y matemáticos de la época continuaron trabajando para hallar una solución más satisfactoria. Así dando continuidad a los trabajos de su padre, Daniel Bernoulli (1700-1782) en 1753 presentó otra solución a la Ecuación de la Cuerda, de la forma: $y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos\left(\frac{\pi\, k\, a\, t}{L}\right) sen\left(\frac{\pi\, k\, x}{L}\right)$, donde los coeficientes b_k dependen de las condiciones iniciales. Así, según Bernoulli la cuerda oscila simultáneamente con varias frecuencias, mediante la superposición de ondas senoidales y cosenoidales, planteando de esta manera la posibilidad de desarrollar funciones en series trigonométricas. Esta solución es mucho más significativa desde el punto de vista físico que la de D'Alembert y explica los distintos armónicos que se producen en la vibración de las cuerdas de los instrumentos musicales; sucede que Bernoulli además de ser matemático, también se dedicaba a la

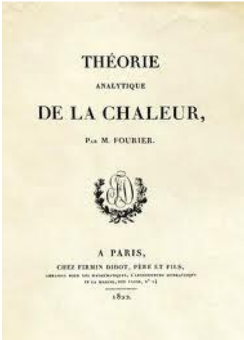
Física y a la Música. Aún siendo correcta la solución de Bernoulli, generó varias críticas por parte de sus colegas, en particular de D'Alembert y Euler, que se rehusaban a admitir que una función general pudiera ser expresada en términos de series infinitas de funciones trigonométricas. A pesar de todas las críticas, Bernoulli estaba en lo correcto y su propuesta de desarrollar en series trigonométricas funciones arbitrarias, sería retomada más tarde por Fourier y Dirichlet, en cuyos trabajos constan las bases analíticas que demuestran la posibilidad de dichas expansiones.

El matemático y físico francés **Jean Baptiste Joseph Fourier** (1768-1830) fue pionero en el estudio de la transferencia del calor en sólidos y fue quien dedujo la denominada **Ecuación del Calor**, que consiste en una EDP cuya versión tridimensional es: $\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)}$

donde u(x,y,z,t) representa la temperatura en cada punto del interior del sólido en cada instante de tiempo y α es una constante que depende del material. Fourier presentó en 1807 los resultados de sus investigaciones a la Academia de Ciencias de París y fue evaluado por destacadas personalidades, entre ellos Pierre Simon Laplace (1749-1827) y Joseph Louis Lagrange (1736-1813); pero el trabajo no tuvo buena aceptación y recibió muchas críticas, entre ellas la falta de rigurosidad en los fundamentos analíticos - a pesar que los resultados coincidían con las observaciones empíricas- y otra cuestión muy controversial fue la propuesta de Fourier de expandir en series trigonométricas una función arbitraria; él afirmaba que una función f(x) podía desarrollarse como: $f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_k \cos(kx) + b_k \, sen(kx) \right]$ y encontró también las expresiones para calcular los coeficientes a_k y b_k; son las que actualmente se conocen como Series de Fourier. Si bien la expansión en series trigonométricas no fue una idea original de Fourier (ya hemos visto que Daniel Bernoulli varias décadas antes ya las había propuesto) el verdadero mérito de Fourier ha sido encontrar el modelo matemático correcto para la conducción del calor, desarrollar el Método de Separación de Variables para resolver una EDP y encontrar su solución mediante la aplicación de series trigonométricas. Pese a las controversias generadas por el trabajo de Fourier, los integrantes de la Academia de París no pudieron dejar de reconocer la relevancia del campo de estudio y así decidieron que la temática para el Gran Premio de la Academia para 1812 sería la propagación del calor en cuerpos sólidos; por supuesto Fourier se presentó y ganó el Premio, pero decidieron que su trabajo no sería publicado en las Memorias de la Academia, por las razones citadas anteriormente. A pesar del traspié, Fourier continuó trabajando tenazmente, mejorando y ampliando su teoría y en 1822 publicó su obra *Théorie Analytique de la Chaleur*; al poco tiempo fue nombrado Secretario de la Academia y entonces consiguió publicar su trabajo de 1807 - prácticamente sin cambio alguno- en las Memorias de la Academia de 1826.

Fourier inauguró un campo fértil de trabajo para físicos y matemáticos a principios del Siglo XIX con su Teoría Analítica del Calor y sus desarrollos en series trigonométricas; varias personalidades de la ciencia continuaron sus trabajos, entre los cuales cabe destacar al matemático alemán Johann P: Lejeune Dirichlet (1805-1859), quien en 1829 dio una demostración rigurosa de la convergencia de las Series de Fourier para funciones generales, aún las continuas por tramos. Recién entonces los trabajos de Fourier y D. Bernoulli fueron reconocidos y aceptados plenamente.

Joseph Fourier es considerado uno de los más grandes matemáticos aplicados de la historia y su Teoría Analítica del Calor es reconocida como uno de los pilares de la Física Teórica; además los aportes de las Series y las Transformadas de Fourier a distintas ramas de la Ingeniería son indiscutibles.



Un retrato de Joseph Fourier y la portada de su obra *Théorie Analytique de la Chaleur* (1822)

Materiales y Métodos

A partir de esta sección abordaremos específicamente la **Ecuación del Calor de Fourier**, la cual consiste en una EDP que trataremos en sus versiones unidimensional y bidimensional; la resolución de estas ecuaciones pueden realizarse utilizando el Análisis Real – y es ahí donde aparecen las Series de Fourier – como también desde el Análisis Complejo. Según ya se ha expresado, esta presentación se encuentra en el marco de un proyecto de investigación actualmente en desarrollo en la FI-UNaM, en la cátedra de Matemática Aplicada, ubicada en el cuarto semestre de carrera y perteneciente al Ciclo Común, donde se recibe a alumnos que ya han cursado asignaturas básicas de Matemática, Física y Química, y poseen conocimientos sobre Cálculo Diferencial e Integral en una y varias Variables Reales. En la asignatura Matemática Aplicada 1 se abordan Funciones en Variable Compleja, por lo cual la posibilidad de resolver EDP mediante elementos de Análisis Complejo es sumamente interesante a efectos de mostrar la utilidad de estas herramientas en problemas concretos. Además en este cuarto semestre de carrera, los alumnos cursan asignaturas en áreas como Mecánica y Termodinámica, que permiten contextualizar la Matemática en disciplinas directamente vinculadas con la carrera al brindar al estudiante los conocimientos básicos para comprender el planteo, resolución e interpretación de estos problemas y/o ejemplos de aplicación.

A continuación se presenta la **Guía Didáctica**, material elaborado por la cátedra y con el cual se trabaja en clases teórico – prácticas; esta Guía consta de siete secciones. Se inicia la Sección I con una breve caracterización de los principales modelos físicos representados a través de EDP, para luego abordar en la Sección II la Ecuación del Calor, haciendo una deducción de su versión unidimensional (conducción del calor en una barra delgada), para después plantear en la Sección III el Modelo con Condiciones Iniciales y de Frontera, que se resuelve desde el Análisis Real en las Secciones IV y V mediante el Método de Separación de Variables y Series de Fourier (temas que el alumno ya ha visto en asignaturas previas), tratándose para condiciones homogéneas y no homogéneas. En la Sección VI se plantea el caso bidimensional de la Ecuación del Calor (conducción del calor en una placa), que luego se resuelve mediante Análisis Complejo, y así entran en escena varios de los conceptos desarrollados previamente en la asignatura, como funciones armónicas y analíticas, condiciones de diferenciabilidad y Transformaciones (Mapeo) en el plano complejo; este enfoque es particularmente interesante porque trae a escena conceptos como Gradiente y Curvas Ortogonales (temas vistos en asignaturas previas) y los aplica en el contexto físico; se completa con la resolución de un ejemplo y se finaliza en la Sección VII con algunas actividades propuestas para el alumno.

Dada la extensión y complejidad del tema no se pretende hacer un tratamiento exhaustivo del mismo, lo cual además escapa a los objetivos de la asignatura; se anhela en cambio, presentar una Matemática en Contexto, que despierte el interés de los alumnos y les permita visualizar algunas aplicaciones de esta disciplina en lo que será su futura profesión. Existe un objetivo aún más ambicioso que perseguimos los docentes que emprendimos este proyecto y es desarrollar e incentivar en nuestros alumnos el espíritu de investigación.

Guía Didáctica

Sugerencia: *para una mejor comprensión de los temas desarrollados en la guía y un mejor aprovechamiento de la misma, se recomienda repasar EDO y Series de Fourier.*

I. Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Parciales Lineales

Las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) al igual que las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) se clasifican como lineales si la variable dependiente y todas sus derivadas aparecen elevadas a la primera potencia. Sea u(x,y) una función de dos variables independientes, la forma general de una EDP lineal de segundo orden será: $\boxed{A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+F\,u=G}$

Las EDP lineales de segundo orden revisten una importancia especial en Ingeniería, ya que representan modelos matemáticos de varios fenómenos físicos; las tres más destacadas son:

$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ Ecuación de calor unidimensional

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ Ecuación de Onda

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ Ecuación de Laplace en dos dimensiones

Las EDP se pueden resolver por métodos analíticos ó numéricos; entre los primeros se encuentra la separación de variables, donde se plantea una solución del tipo: u(x,t) = X(x) T(t), de manera que se transforma la EDP de segundo orden en dos EDO's.

II. La Ecuación del Calor unidimensional

Sea una varilla delgada de longitud L, ubicada a lo largo del eje x y sea u(x,t) la función de temperatura en cada punto de la misma y en cualquier instante t; en este modelo se considera que la temperatura en una sección transversal A, es la misma para todos sus puntos; dependiendo solamente de su posición en x. Se considera así un elemento comprendido entre dos secciones ubicadas en x y (x + Δx). Si la varilla tiene las siguientes características:

- Es homogénea, es decir densidad constante: "ρ"
- Calor específico "c" y conductividad térmica "k" constantes
- No hay fuentes de calor en su interior, ni escapa calor al medio (aislada)

La cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de un elemento de masa "m" en una cantidad "Δu" viene dada por:

$$Q = m\,c\,\Delta u = \rho\,A\,\Delta x\,c\,\Delta u \qquad (1)$$

El flujo térmico que ingresa al elemento es:

$$Q_t = -k\,A\frac{\partial u}{\partial x} = -kAu_x(x,t) \qquad (2)$$

y el flujo saliente: $Q_t = -k\,A\,u_x(x+\Delta x,\,t)$

de manera que el flujo neto en el elemento de varilla considerado será:

$$k\,A[u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t)] \qquad (3)$$

Derivando la expresión (1) e igualando a (3), resulta:

$$\frac{k}{\rho\, c}\,\frac{(u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t)}{\Delta x}=u_t$$

si ahora se plantea el límite cuando $\Delta x \to 0$, se llega a la ecuación de calor unidimensional

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \qquad (4)$$

donde el coeficiente $\alpha=\dfrac{k}{\rho\, c}$ se denomina "difusividad térmica".

En versión bidimensional de la ecuación es: $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial t}=\alpha\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)}$ (5)

III. Condiciones iniciales y de frontera

Para encontrar una solución a la EDP (4 - 5) es necesario especificar además condiciones iniciales (CI) y condiciones de frontera (CF). Las CI denotan la distribución de temperatura en el instante inicial (t=0) y en el caso unidimensional tendría la forma u(x,0) = f(x). Las CF indican las restricciones que debe satisfacer la función de temperatura ó sus derivadas, en los bordes ó fronteras de la región; en el caso unidimensional podría ser, por ejemplo:

$$\begin{cases} u(o,t)=T_1 \\ u(L,t)=T_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} (\partial u/\partial x)_{x=0}=0 \\ (\partial u/\partial x)_{x=L}=0 \end{cases}$$

Así, resolver una EDP, sujeta a CI y CF, constituye un Problema con Valores en la Frontera (PVF).

IV. Solución de la Ecuación de Calor mediante separación de variables

En este ejemplo se busca determinar la distribución de temperatura u(x,t) en una varilla de longitud L, con temperatura inicial f(x) y cuyos extremos se mantienen a temperatura constante nula; resulta así el siguiente PVF:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=\alpha\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0<x<L \qquad t>0 \\ u(0,t)=u(L,t)=0 & t>0 \\ u(x,0)=f(x) & 0<x<L \end{cases}$$

Una alternativa para hallar una solución analítica de este modelo es mediante separación de variables:

$$u(x,t)=X(x)T(t)\Rightarrow X\,T^{I}=\alpha\,X^{II}\,T\Rightarrow\frac{X^{II}}{X}=\frac{T^{I}}{\alpha T}=ctte$$

Se encuentra así:

$$X(x)=a\,sen\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\qquad T(t)=b\,e^{-\alpha\left(\frac{n\,\pi}{L}\right)^2 t}\qquad\Rightarrow\qquad u_n(x,t)=ab\,e^{-\alpha\left(\frac{n\,\pi}{L}\right)^2 t}\,sen\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,e^{-\alpha\left(\frac{n\,\pi}{L}\right)^2 t}\,sen\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)$$

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,sen\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)=f(x)\qquad\Rightarrow\qquad A_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,sen\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)dx$$

Resultando finalmente: $$\boxed{u(x,t)=\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L f(x)\,sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\right)e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\,sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)} \qquad (6)$$

Donde se reconoce que la solución encontrada viene representada por desarrollos en Series de Fourier.

V. Barra con condiciones de frontera no homogéneas

Pero no todos los PVF son factibles de resolver por separación de variables, tal por ejemplo es el caso cuando las CF especifican que los extremos de la barra se mantienen a temperaturas constantes, pero distintas de cero, como indica el PVF siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0<x<L \qquad t>0 \\ u(0,t) = T_1 \qquad u(L,t)=T_2 & t>0 \\ u(x,0)= f(x) & 0<x<L \end{cases}$$

Aquí se propone otra alternativa de solución, descomponiendo u(x,t) de la siguiente manera:

$$u(x,t)=U(x,t)+\Psi(x) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial U}{\partial t}=\alpha\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\Psi^{II}(x)\right)$$

para que esta última EDP tome la forma estándar de la Ecuación de Calor:

$$\Psi^{II}(x)=0 \Rightarrow \Psi(x)=A\,x+B$$

Los valores de A y B se obtienen de las CF, así resulta:

$$\Psi(x)=\left(\frac{T_2-T_1}{L}\right)x+T_1 \qquad (7)$$

Para hallar U(x,t) se resuelve un PVF con CF homogéneas, que se puede resolver por separación de variables y su solución es una Serie de Fourier, análoga a la (6)

$$U(x,t)=\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L [\,f(x)-\Psi(x)]\;sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\right)e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\,sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$u(x,t)=U(x,t)+\left(\frac{T_2-T_1}{L}\right)x+T_1$$

VI. Funciones armónicas y el Problema de Dirichlet

En estado estacionario, la ecuación de calor bidimensional (5) adquiere la forma:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0} \qquad (8)$$

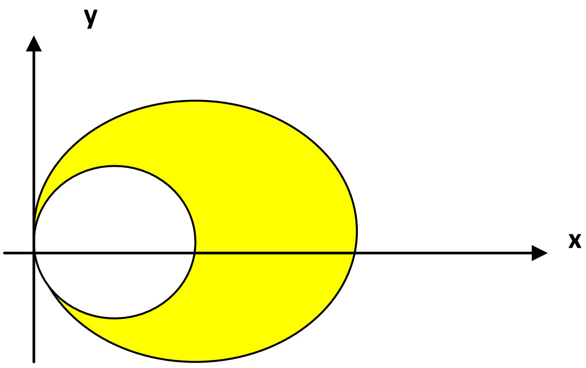
Se reconoce que u(x,y) es una función armónica y la expresión (8) se denomina Ecuación de Laplace. Un PVF que consiste en determinar una función armónica en cierta región del plano, conociendo los valores que la misma toma en la frontera de dicha región, se conoce como Problema de Dirichlet.

Si u(x,y) es solución de un Problema de Dirichlet, se puede encontrar una función analítica de variable compleja T(x,y): $\boxed{T(x,y)=u(x,y)+i\,v(x,y)}$ donde la componente real es la temperatura en cada

punto de una región del plano xy y la componente imaginaria, denominada "función de corriente", es la armónica conjugada; de manera que sus curvas de nivel serán ortogonales.
Para este caso, habrá dos componentes del flujo de calor (2), de manera que dicho flujo térmico se producirá en la dirección del gradiente de temperatura, que coincide con la normal a las isotermas; así se concluye que v(x,y) determina la dirección del flujo de calor, cuyo sentido será el de la disminución de temperaturas.

VI. 1. Resolución de un Problema de Dirichlet mediante Análisis Complejo.
Además de los métodos de Análisis Real vistos hasta aquí, una solución analítica de un PVF puede encontrarse también mediante Análisis en Variable Compleja; ya se ha visto la relación entre funciones analíticas, armónicas y armónicas conjugadas. A continuación se determinará u(x,y) utilizando Transformaciones en el Plano Complejo; aprovechando que los Problemas de Dirichlet están resueltos para regiones sencillas (rectangulares, circulares, semiplanos, etc), entonces se buscará transformar la región original en algunas de ellas, una vez resuelto el PVF, se llevará su solución nuevamente a la región original, mediante una nueva transformación.

VI. 2. Ejercicio
Dos cilindros se mantienen a temperaturas constantes; el interior a 100º C y el exterior a 0º C; sus radios son ¼ y ½ respectivamente y están ubicados según indica la figura



Se pide determinar la distribución de temperatura u(x,y) en régimen permanente, en la región comprendida entre ambos cilindros.
En primer lugar se busca transformar la región en alguna más sencilla, mediante mapeo; eligiendo la ley: $\boxed{w = \frac{1-z}{z}}$, ambas circunferencias se transforman en las rectas verticales u = 0 y u = 1; así la franja infinita de ancho unidad es la imagen de la región original. Las CF si bien indican temperaturas constantes en los bordes de la región, no son ambas homogéneas, de manera que la solución de régimen permanente tendrá la forma dada por (7), con T_1 = 0º C , T_2 = 100º C y L = 1. Resultando:
Ψ (u) = 100 u; y su armónica conjugada será φ **(v) = 100 v**.
Llevando estas funciones nuevamente al plano xy:

$$\Psi(x,y) = 100\left(\frac{x}{x^2+y^2} - 1\right) \qquad \vartheta(x,y) = 100\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) \qquad (9)$$

VII. Actividades

1- Desarrollar analítica y gráficamente la transformación indicada
2- Obtener la función de temperatura y su armónica conjugada
3- Mostrar que las dos funciones (9) son armónicas

4- Mostrar que la función temperatura ψ (x,y) encontrada satisface las CF del problema
5- Mostrar que las funciones (9) determinan familias ortogonales.
6- Determinar qué tipos de curvas son las isotermas.

Referencias

1) ALMIRA, J.M. (2008). Cuerdas vibrantes y calor: la génesis del Análisis de Fourier.
2) CAMARENA GALLARDO, P. (2008). La matemática en el contexto de las ciencias. Memorias del III Coloquio Internacional sobre enseñanza de las Matemáticas. Perú.
3) CAMARENA GALLARDO, P. (2003) La matemática en el contexto de las ciencias – Fase Didáctica*;* CLAME – ALME. Vol. 16. Tomo I. Chile.
4) NAGLE, K.; SAFF, E.; & SNIDER, A. (2001). Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera. 3ra. Edición. Pearson Educación. México.
5) O´NEIL, P. (2009). Matemáticas avanzadas para Ingeniería. 6ta. Edición. Cengage Learning. México.
6) ORTIZ MELGUIZO, A. (2006). Estudio sobre Joseph Fourier. Univesridad Autónoma de Madrid.
7) WUNSCH, D. (1999). Variable Compleja con aplicaciones. 2da. Edición. Pearson Educación. México.
8) ZILL, D. & CULLEN M. (2009). Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera. 7ma. Edición. Cengage Learning. México.